

# Proposition de thèse - Septembre 2023

## Homogénéisation d'équations de Hamilton-Jacobi conduisant à des problèmes stratifiés

### Encadrement scientifique

- Yves ACHDOU (achdou@ljl.univ-paris-diderot.fr), Université Paris-Cité et Laboratoire Jacques-Louis Lions, Bâtiment Sophie Germain, 5, rue Thomas Mann, Paris 13 ème (Métro Bibliothèque François Mitterrand)
- Claude LE BRIS (claude.le-bris@enpc.fr), CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8, Avenue Blaise Pascal, Marne-La-Vallée (RER A, station Noisy-Champs) & INRIA, 2, rue Simone Iff, 75012 Paris (Métro Dugommier & RER A, station Gare de Lyon).
- Nicoletta TCHOU (nicoletta.tchou@univ-rennes1.fr), Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 Rennes.

### Sujet

La thèse a pour but d'étudier certaines questions théoriques et éventuellement numériques liées à la théorie de l'homogénéisation [5], pour des équations de type Hamilton-Jacobi comme par exemple

$$u_\varepsilon(x) + H\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u_\varepsilon(x)\right) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

pour des Hamiltoniens  $H(y, p)$  qui sont originalement des fonctions périodiques de leur premier argument, mais qui sont perturbés par un "défaut" brisant cette périodicité, (comme dans [6, 7] pour le cadre elliptique).

- Par exemple, on peut considérer  $H(y, p) = |p| - V_{per}(y) - \tilde{V}(y)$ , avec  $V_{per}$  périodique et  $\tilde{V}$  à support compact, comme dans [3, 10]. Dans certains cas bien identifiés, on trouve à la limite un exemple simple de problème *stratifié*, qui peut se voir comme une formulation bien posée d'un problème comportant une condition de type Dirichlet en un point. L'étude des problèmes stratifiés est un aspect très récent de la théorie des équations de Hamilton-Jacobi, voir [4]. En une phrase, la notion de problème stratifié est un bon cadre pour aborder des équations de type Hamilton-Jacobi présentant des discontinuités dans le Hamiltonien.
- On peut aussi penser à des problèmes de transmission avec des interfaces oscillantes et mettant en jeu des équations de Hamilton-Jacobi dans les domaines situés de part et d'autre des interfaces. Des travaux récents, [1, 2], contiennent des résultats d'homogénéisation pour de tels problèmes quand les interfaces sont périodiques. L'homogénéisation conduit à une condition de transmission effective mettant en jeu un limiteur de flux qui est obtenu en résolvant un problème de cellule dans un domaine non borné. Une question ouverte est de comprendre ce qui se passe quand ces interfaces oscillantes présentent des défauts locaux de périodicité. Ici encore, on s'attend à trouver à la limite un problème effectif stratifié.

- On peut aussi penser à des équations comme (1) mais avec un terme diffusif  $-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + \dots$ . Dans ce cas, l'étude du passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  est un problème essentiellement ouvert, les seules avancées étant dues à P-L. Lions, [10].

En résumé, le but de la thèse est donc d'étudier des problèmes d'homogénéisation aboutissant à des problèmes stratifiés. Le cadre de travail et les questions posées seront précisés en fonction des connaissances et aspirations de la candidate ou du candidat. L'accent pourra aussi être mis, simultanément ou alternativement, sur l'approximation numérique et sur les informations qu'on peut en tirer pour la convergence de la solution du problème (1) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Une bonne culture des notions de base d'analyse fonctionnelle et d'analyse des équations aux dérivées partielles sera utile. Connaître des rudiments de la théorie de l'homogénéisation [5, 9] et/ou de l'analyse des équations de Hamilton-Jacobi et de leurs solutions de viscosité [8] pourra être un plus.

Le financement de la thèse et son programme scientifique s'inscrivent dans le projet **ANR COSS (Control on Stratified Structures)** [ANR-22-CE40-0010] porté par Nicolas Forcadel (Rouen)

## References

- [1] Y. Achdou, S. Oudet, N. Tchou Effective transmission conditions for Hamilton-Jacobi equations defined on two domains separated by an oscillatory interface *J. Math. Pures Appl.*, 2016, 1091–1121
- [2] Y. Achdou, N. Tchou Homogenization of a transmission problem with Hamilton-Jacobi equations and a two-scale interface. Effective transmission conditions. *J. Math. Pures Appl.* (9) 122 (2019), 164–197.
- [3] Y. Achdou, C. Le Bris, Homogenization of some periodic Hamilton-Jacobi equations with defects. *Comm. Partial Differential Equations* 48 (2023), no. 6, 944–986.
- [4] G. BARLES AND E. CHASSEIGNE, **An illustrated guide of the modern approaches of Hamilton-Jacobi equations and control problems with discontinuities**, arXiv preprint arXiv:1812.09197, (2022).
- [5] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, **Asymptotic analysis for periodic structures**, Studies in Mathematics and its Applications, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [6] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, A possible homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects. *Milan Journal of Mathematics* Vol. 80 (2012) 351-367.
- [7] X. Blanc, C. Le Bris. **Homogénéisation en milieu périodique... ou non: Une introduction**. Vol. 88. Springer Nature, 2023.
- [8] L.C. Evans, The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear PDE. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 111,1989, 3-4, 359-375.
- [9] P.L. Lions, G. Papanicolaou, and SRS. Varadhan, Homogenization of Hamilton-Jacobi equations, preprint (1986).
- [10] P.L. Lions, Cours au Collège de France, 2013-2014, voir aussi PL. Lions & P. Souganidis, travaux en cours.